Espacios conexos

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que X es **conexo** si no existen U, V abiertos no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.
Si X no es conexo, dos conjuntos U y V en las condiciones anteriores forman una **separación** de $(X, \mathcal{T})$.

Proposición. a) Un espacio X es conexo si y solo no existen U, V cerrados no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.
b) Un espacio X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Demostracion. Inmediata teniendo en cuenta que un conjunto es cerrado si y solo si s complementario es abierto.

Observación. Si X un espacio topológico y $A \subset X$, cuando hablemos de si A es **conexo** se entenderá con la topología de subespacio.
Es fácil ver que, entonces, A no es conexo si y solo si existen $U, V \subset X$, U, V abiertos de X, tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap U \cap V = \emptyset$.
Un par U, V en las condiciones anteriores lo llamaremos separación de A en X.

Ejemplos de espacios conexos y no conexos

a) $(X, \mathcal{T}_t)$ es conexo (el único abierto no vacío es X).
b) $(X, \mathcal{T}_d)$, con $|X| > 1$, no es conexo.
Demostración. Dado $x_0 \in X$, $U = \{x_0\}, V = X \setminus \{x_0\}$ es una separación de $(X, \mathcal{T}_d)$.
c) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ no es conexo.
Demostración. $U = (-\infty, 0), V = [0, \infty)$ es una separación de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$.
d) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{T}_u)$ no es conexo.
Demostración. $U = (-\infty, 0), V = (0, \infty)$ es una separación de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{T}_u)$.
e) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo.
Demostración. Supongamos que U, V es una separación de $\mathbb{R}$ y sean $u \in U$, $v \in V$. Podemos suponer que $u < v$. Sea $A = \{u' \in U \mid (u, u') \subset U\}$ que cumple que $A \neq \emptyset$ (por U abierto) y que v es cota superior de A. Sea $\alpha = \sup A$.
Supongamos que $\alpha \in U$. Como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U$. Como $\alpha = \sup A$, existe $u' \in (\alpha - \varepsilon, \alpha]$ tal que $u' \in A$. Entonces $(u, u') \subset U$ y por tanto $(u, \alpha + \varepsilon) \in U$. Luego $\alpha + \varepsilon \in A$ (Contradicción con $\alpha = \sup A$).
Supongamos que $\alpha \in V$. Como V es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset V$. Pero entonces $\alpha - \varepsilon$ sería cota superior de A (Contradicción con $\alpha = \sup A$).
f) La recta digital es conexa.
Demostración. Es una adaptación de la anterior.

Imágenes continuas de espacios conexos

Proposición. Sea X conexo y sea $f : X \longrightarrow Y$ continua. Entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $f(X)$ no es conexo. Sea U, V una separación de $f(X)$ en Y. Entonces $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son conjuntos abiertos disjuntos no vacíos cuya unión es X. Luego X no es conexo. Contradicción.

Corolario. Si X e Y son homeomorfos, entonces X es conexo si y solo si lo es Y.
Es decir, la conexión es una propiedad topológica.

Ejemplo. Los intervalos (a, b), (a, ∞), (∞, b) son conexos (por homeomorfos a $\mathbb{R}$).

Corolario. Si X es conexo y X^* es un espacio cociente de X, entonces X^* es conexo.

Ejemplo. S^1 es conexo.

Ejemplo. S^1 y el intervalo $(0, 1)$ no son homeomorfos.

Demostración. Supongamos que lo fueran. Sea $f : (0, 1) \longrightarrow S^1$ un homemorfismo.
Entonces $f|_{(0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}} : (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow S^1 \setminus \{f(\frac{1}{2})\}$ sería un homeomorfismo.
Contradicción pues $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ no es conexo ($U = (0, \frac{1}{2}), V = (\frac{1}{2}, 1)$ forman una separación de $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$), pero $S^1 \setminus \{f(\frac{1}{2})\}$ sí lo es (por ser homeomorfo a $(0, 1)$).

Adherencias de espacios conexos

Lema. Sea U, V una separación de X, y sea $A \subset X$, A conexo $\Rightarrow A \subset U$ o $A \subset V$.

Demostración. Sean $U' = U \cap A$ y $V' = V \cap A$, abiertos en A, tales que $U' \cap V' = \emptyset$, $U' \cup V' = A$. Como A es conexo, o $U' = \emptyset$ y $A \subset V' \subset V$, o $V' = \emptyset$ y $A \subset U' \subset U$.

Proposición. Sea X espacio topológico, $A \subset X$, A conexo y sea $A \subset B \subset \overline{A}$. Entonces B es conexo. En particular, si $A \subset X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \bar{A}$.
Supongamos que B no es conexo y sea U, V una separación de B (U, V abiertos de B). Como A es conexo, por el Lema anterior, $A \subset U$ o $A \subset V$. Supongamos que $A \subset U$. Sea V' abierto de X tal que $V = V' \cap B$. Entonces $U \cap V' = \emptyset$ y por tanto $A \cap V' = \emptyset$. Esto implica que $\bar{A} \cap V' = \emptyset$ y por tanto $B \cap V' = \emptyset$, luego $V = \emptyset$. Contradicción.

Corolario. Los intervalos cerrados y semiabiertos son conexos en la topología usual.

Ejemplo. $S = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x \in (0,1] \right\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$ es conexo en $\mathcal{T}_u$.

Demostración. Sea $S_0 = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid x \in (0,1] \right\}$ que es conexo (pues es la imagen de $(0,1]$ por una aplicación continua). Como $S = \overline{S_0}$, entonces S es conexo.

Uniones de espacios conexos

Proposición. Sea X un espacio topológico. Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de subespacios conexos de X tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $Y = \bigcup_{i\in I} A_i$ no es conexo. Sea U, V una separación de Y. Sea $p \in \bigcap_{i\in I} A_i$ y supongamos que $p \in U$. Dado $i \in I$, como A_i es conexo, $A_i \subset U$ o $A_i \subset V$, pero como $p \in U \cap A_i$, ha de ser $A_i \subset U$. Por tanto $Y = \bigcup_{i\in I} A_i \subset U$ y U, V no es una separación de Y. Contradicción.

Ejemplo. El pendiente hawaiiano $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}, 0)$, unión de circunferencias de centro $(\frac{1}{n}, 0)$ y radio $\dfrac{1}{n}$, es conexo en $\mathcal{T}_u$.

Productos de espacios conexos

Proposición. $X \times Y$ es conexo si y solo si X e Y son conexos.

Demostración. **$\Rightarrow$)** Consideramos las proyecciones $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$, continuas y suprayectivas. Entonces, si $X \times Y$ es conexo, X e Y son conexos.

$\Leftarrow$) Para cada $(x, y) \in X \times Y$, los espacios $X \times \{y\}$ y $\{x\} \times Y$ son conexos por ser homeomorfos a X e Y, respectivamente.
Por tanto, para cada $(x, y) \in X \times Y$, el espacio $T_{(x,y)} = (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos con un punto (x, y) en común.
Finalmente, si fijamos $y_0 \in Y$, se tiene que $X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_{(x,y_0)}$, que es conexo por ser la unión de espacios conexos con intersección $\bigcap_{x \in X} T_{(x,y_0)} = X \times \{y_0\} \neq \emptyset$.

Observación. El resultado anterior es cierto para cualquier producto finito.

Corolario. $[0, 1] \times [0, 1]$ es conexo y por tanto todos sus espacios cocientes también.

Corolario. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo

Componentes conexas

Dado X espacio topológico, una **componente conexa** de X es un subconjunto conexo maximal de X. Es decir, C es una componente conexa de X si C es conexo y cumple que si $C \subsetneq D$ entonces D no es conexo.
X es **totalmente desconectado** si sus componentes conexas son los puntos.

Ejemplos. a) Las componentes conexas de $(X, \mathcal{T}_d)$ son los puntos.
b) Las componentes conexas de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ son los puntos.
c) Las componentes conexas de $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \mathcal{T}_u\right)$ son los puntos.
d) Las componentes conexas de $\left(\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}, \mathcal{T}_u\right)$ son los puntos.
e) Las componentes conexas de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathcal{T}_u)$ son $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Observación. Las componentes conexas de X son subespacios disjuntos, conexos y cerrados de X cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo de X está contenido en una de ellas. Si X tiene un número finito de componentes, también son abiertas.

Observación. Las componentes conexas de X son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia en X: $x \sim y \Leftrightarrow$ existe un subespacio conexo de X que contiene a x e y.

Ejercicios

Ejercicio 1. Si X es un espacio conexo cuando usamos cierta topología, ¿debe seguir siéndolo si utilizamos otra menos fina? ¿y con otra más fina? Ilustrarlo con ejemplos.

Solución: Sean $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3$ topologías en X.
Si $(X, \mathcal{T}_2)$ es conexo, también lo es $(X, \mathcal{T}_1)$ pues si existiera una separación de X en $\mathcal{T}_1$ también sería separación de X en $\mathcal{T}_2$. Sin embargo, $(X, \mathcal{T}_3)$ no tiene por qué ser conexo. Un ejemplo para ilustrarlo sería $\mathbb{R}$ y las topologías $\mathcal{T}_t \subset \mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_d$, que cumplen que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_t)$ son conexos, pero $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$ no lo es.

Ejercicio 2. Si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico, ¿puede asegurarse que el interior y la frontera de A son también conexos?

Solución: Ninguna de las dos cosas tiene que cumplirse.
Por ejemplo, $A = \bar{B}_1(1,0) \cup \bar{B}_1(-1,0)$ es conexo pero $\mathring{A} = B_1(1,0) \cup B_1(-1,0)$ no es conexo.
Por otra parte, $A = B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)$ es conexo pero $\mathrm{Fr}(A) = S_1(0,0) \cup S_2(0,0)$ no es conexo (es una unión de circunferencias).

Ejercicios

Ejercicio 3(a). Sea $A = \{(x,y) \mid xy = 0\} \cup \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x \neq 0\right\}$.

¿Es A conexo con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual?

Solución: Sean $U = \left\{(x,y) \mid x > 0, x > \frac{1}{2y}\right\}$ y $V = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \mid x > 0, x \geq \frac{1}{2y}\right\}$. y

Entonces U, V es una separación de A en $\mathbb{R}^2$ pues U y V son abiertos de $\mathbb{R}^2$ X tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Solución alternativa: Sea $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\} \subset A$ tal que

- $B \neq \emptyset$,
- $B \neq A$,
- B es abierto en A pues $B = V \cap A$ con $V = \left\{(x,y) \mid x > 0, y > \frac{1}{2x}\right\}$ abierto de $\mathbb{R}^2$,
- B es cerrado en A pues $B = F \cap A$ con $F = \left\{(x,y) \mid x > 0, y \geq \frac{1}{2x}\right\}$ cerrado de $\mathbb{R}^2$.

Por tanto, A no es conexo pues tiene un subconjunto propio no vacío abierto y cerrado.

Ejercicios

Ejercicio 3(b). Sea

$$S=\left\{\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\cos t,\left(1-\frac{1}{t}\right)\operatorname{sen} t\right)\mid t\geq 1\right\}\cup\{(\cos t,\operatorname{sen} t)\mid t\geq 1\}.$$

¿Es S conexo con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ con la topología usual?

Solución: Sea $S_0 = \left\{\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\cos t,\left(1-\frac{1}{t}\right)\operatorname{sen} t\right)\mid t\geq 1\right\}$ que es conexo por ser la imagen de $[1,\infty)$ por la función continua $f:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $f(t)=\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)\cos t,\left(1-\frac{1}{t}\right)\operatorname{sen} t\right)$.
Como $S=\overline{S_0}$, S también es conexo.

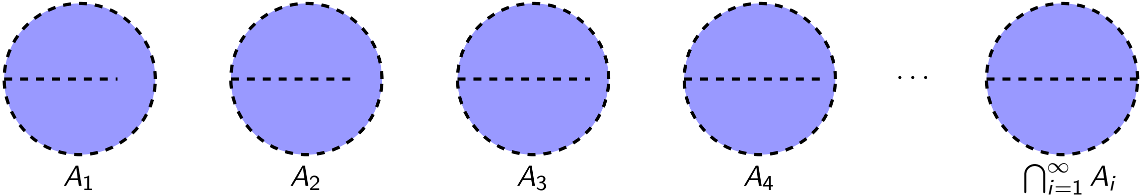
Ejercicio 4. Caracterizar todos los subconjuntos conexos de $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{CF})$.

Solución: Utilizaremos que un conjunto no es conexo si y solo si existen existen U, V cerrados no vacíos tales que $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=X$.
Teniendo en cuenta que en la topología de los complementos finitos un conjunto es cerrado si y solo es finito, es inmediato ver que $A\subset\mathbb{R}$ es no conexo en la topología de los complementos finitos si y solo si es finito y tiene al menos 2 elementos.

Ejercicios

Ejercicio 5. Sean $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ subespacios conexos de un espacio X.
a) ¿Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo?
b) ¿Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo?

Solución: a) Es conexo por ser unión de conexos con $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \neq \emptyset$.
b) No tiene por qué ser conexo. Por ejemplo, si $A_i = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times (-\infty, i]$, se tiene que todos los A_i son conexos pero $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ no lo es.
Otro ejemplo sería $A_i = \{(x, y) \in B_1(0, 0) \mid y \neq 0 \text{ ó } y = 0, x < 1 - \frac{1}{n}\}$,



Ejercicio 6. Describir las componentes conexas del subconjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales de $\mathbb{R}$ con la topología habitual.

Solución: Las componentes conexas de $\mathbb{I}$ son los puntos pues si $A \subset \mathbb{I}$ tiene dos o más elementos entonces A no es conexo (Si $r, s \in \mathbb{I}$, $r < s$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r < q < s$, y entonces $U = \{x \in A \mid x < q\}$, $V = \{x \in A \mid x > q\}$ forman una separación de A).

Ejercicios

Ejercicio 7. Demuestra que $[0,1]$, $[0,1)$, S^1 y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos respecto $\mathcal{T}_u$.

Solución: a) Supongamos que $f:[0,1]\longrightarrow[0,1)$ es un homeomorfismo. Si $f(0)=p\in(0,1)$ se tendría que $(0,1]\simeq(0,1)\setminus\{p\}$ (contradicción pues el primero es conexo pero el segundo no). Luego ha de ser $f(0)=0$. Análogamente ha de ser $f(0)=1$. Pero entonces f no sería biyectiva (contradicción).

b) Supongamos que $f:[0,1]\longrightarrow S^1$ es un homeomorfismo $\Rightarrow [0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}\simeq S^1\setminus\{f(\frac{1}{2})\}$ (contradicción pues el primero no es conexo pero el segundo sí lo es).

c) Supongamos que $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ es un homeomorfismo $\Rightarrow [0,1]\setminus\{0\}\simeq\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ (contradicción pues el primero es conexo pero el segundo no).

d) Supongamos que $f:[0,1)\longrightarrow S^1$ es un homeomorfismo $\Rightarrow [0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}\simeq S^1\setminus\{f(\frac{1}{2})\}$ (contradicción pues el primero no es conexo pero el segundo sí lo es).

e) Supongamos que $f:[0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ es un homeomorfismo $\Rightarrow [0,1)\setminus\{0\}\simeq\mathbb{R}\setminus\{f(0)\}$ (contradicción pues el primero es conexo pero el segundo no).

f) Supongamos que $f:S^1\longrightarrow\mathbb{R}$ es un homeomorfismo $\Rightarrow S^1\setminus\{(1,0)\}\simeq\mathbb{R}\setminus\{f(1,0)\}$ (contradicción pues el primero es conexo pero el segundo no).

Espacios conexos

Ejercicio 8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ continua y sobreyectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y con n componentes. Probar que X tiene al menos n componentes conexas. Deducir que dos espacios homeomorfos han de tener el mismo número de componentes conexas.

Solución: Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ las componentes conexas de Y. Para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$ sea $x_i \in f^{-1}(B_i)$ y sea A_i la componente conexa de X que contiene al punto x_i. Entonces $f(A_i)$ es conexo y como $f(x_i) \in B_i$ se tiene $f(A_i) \subset B_i$. Por tanto, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son componentes conexas distintas de X. Así, X tiene al menos n componentes conexas.

Supongamos ahora que $X \simeq Y$, que X tiene m componentes conexas, Y tiene n componentes conexas y $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo. Por f continua y sobreyectiva se tiene $m \geq n$ y por f^{-1} continua y sobreyectiva se tienes $n \geq m$. Luego $m = n$.

Ejercicios

Ejercicio 9. Sea $f : (X = \mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \longrightarrow (Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}, \mathcal{T}_u)$ una función continua y suprayectiva. Probar que $f^{-1}(\{(0,0)\})$ contiene al menos tres puntos.

Solución: Sea $A = f^{-1}(\{(0,0)\})$. Entonces $f|_{\mathbb{R}\setminus A} : \mathbb{R} \setminus A \longrightarrow Y \setminus \{(0,0)\}$ es continua y suprayectiva.
Como $Y \setminus \{(0,0)\}$ tiene 4 componente conexas, por el ejercicio anterior, $\mathbb{R} \setminus A$ tendrá al menos 4 componentes conexas. Esto implica que A ha de tener al menos 3 puntos.

Ejercicio 10. Sean $(X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}, \mathcal{T}_u)$, $(Y = S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}, \mathcal{T}_u)$. ¿Existe alguna función continua y sobreyectiva de X en Y? ¿Y de Y en X? ¿Y si pedimos además que sea biyectiva?

Solución: Es fácil ver que existe f continua y sobreyectiva de X en Y y que también existe g continua y sobreyectiva de Y en X.
Supongamos que existe f continua y biyectiva de X en Y. Sean $a = (2,0)$, $b = (-2,0)$, $c = f(a)$, $f = f(b)$. Entonces $f|_{X\setminus\{a,b\}} : X \setminus \{a,b\} \longrightarrow Y \setminus \{c,d\}$ es continua y biyectiva (contradicción pues el primero es conexo pero el segundo no).
Supongamos que existe g continua y biyectiva de Y en X. Sean $a = (0,0)$, $b = g^{-1}(0,0)$. Entonces $f|_{Y\setminus\{b\}} : Y \setminus \{b\} \longrightarrow X \setminus \{a\}$ es continua y biyectiva (contradicción pues $Y \setminus \{b\}$ es conexo pero $X \setminus \{a\}$ no).

Espacios conexos por caminos

Sean $x, y \in X$ espacio topológico. Un **camino** de x a y en X es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \longrightarrow X$ $(a, b \in \mathbb{R})$ tal que $\alpha(a) = x$ y $\alpha(b) = y$.
Un espacio X es **conexo por caminos** si para cualesquiera $x, y \in X$ existe un camino de x a y.

Ejemplos. a) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ (en general, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$) es conexo por caminos.

b) Cualquier conjunto convexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es conexo por caminos.

c) $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathcal{T}_u)$ es conexo por caminos si $n \geq 2$.

d) $(S^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||\bar{x}|| = 1\}, \mathcal{T}_u)$ es conexo por caminos, si $n \geq 1$.

Proposición. Si un espacio X es conexo por caminos entonces es conexo.

Demostración. Sea $x_0 \in X$. Para cada $x \in X$ existe $\alpha_x : [0, 1] \longrightarrow X$ un camino en X de x_0 a x. Como α es continua y $[0, 1]$ es conexo, $\alpha_x([0, 1])$ es conexo. Entonces $X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x([0, 1])$ es una unión de conjuntos conexos con intersección no vacía. Por tanto X es conexo.

Ejemplo. $S = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \right) \mid x \in (0, 1] \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ es conexo pero no conexo por caminos en la topología usual.

Espacios conexos por caminos

Proposición. Sea X conexo por caminos y $f : X \longrightarrow Y$ continua.
Entonces $f(X)$ es conexo por caminos.

Demostración. Sean $f(x)$ y $f(y)$, $x, y \in X$, dos puntos de $f(X)$.
Sea $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ un camino en X de x a y.
Entonces $f \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ es un camino en $f(X)$ de $f(x)$ a $f(y)$.

Corolario. La conexión por caminos es una propiedad topológica.

Proposición. Sea $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de subespacios conexos por caminos de un espacio X tal que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo por caminos.

Demostración. Sea $p \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Sean $x, y \in Y$ tales que $x \in A_i$, $y \in A_j$.
Como A_i, A_j son conexos por caminos, existe $\alpha_1 : [0,1] \longrightarrow A_i$ tal que $\alpha_1(0) = x$, $\alpha_1(1) = p$, y existe $\alpha_2 : [0,1] \longrightarrow A_j$ tal que $\alpha_2(0) = p$ y $\alpha_2(1) = y$. Entonces un camino de x a y en Y es $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ dado por $\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$.

Componentes conexas por caminos

Dado X espacio topológico, una **componente conexa por caminos** de X es un subconjunto conexo por caminos maximal de X. Es decir, C es una componente conexa por caminos de X si es conexo por caminos y cumple que si $C \subsetneq D$ entonces D no es conexo por caminos.

Ejemplo. Si $S = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left(\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0,1]\right\}\right)$ con la topología usual, las componentes conexas de S son $S_1 = \{0\} \times [-1,1]$ y $S_2 = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0,1]\right\}$.

Observación. Las componentes conexas por caminos de X son subespacios disjuntos, conexos por caminos de X, cuya unión es X, tales que cada subespacio conexo por caminos de X está contenido en una de ellas. No son, en general, ni abiertas ni cerradas en X.

Observación. Las componentes conexas de X son las clases de equivalencia de la relación de equivalencia en X dada por: $x \sim y \Leftrightarrow$ existe un camino en X de x a y.

Observación. Como conexo por caminos implica conexo, cada componente conexa por caminos está contenida en una componente conexa (aunque, como en el ejemplo anterior, una componente conexa puedes ser unión de varias componentes conexas por caminos).

Conexión local

Sea X espacio topológico. X es **localmente conexo** si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x existe un entorno conexo V de x tal que $V \subset U$.
X es **localmente conexo por caminos** si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x, existe un entorno conexo por caminos V de x tal que $V \subset U$.

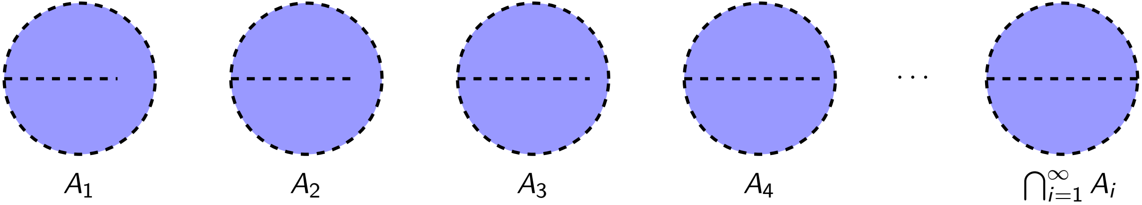
Ejemplos. a) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathcal{T}_u)$ no es conexo ni conexo por caminos, pero es localmente conexo y localmente conexo por caminos.
b) $\left(S = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid x \in (0,1]\right\}, \mathcal{T}_u\right)$, es conexo pero ni es conexo por caminos, ni localmente conexo, ni localmente conexo por caminos.
c) $\left(P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]\right) \cup (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}), \mathcal{T}_u\right)$ es conexo y conexo por caminos pero no localmente conexo ni localmente conexo por caminos.
d) $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ no es ni conexo ni conexo por caminos, ni tampoco localmente.

Observación. Si un espacio topológico X es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos. El recíproco no es cierto (ver ejemplo c)).

Ejercicios

Ejercicio 11. Sean Sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ subespacios conexos por caminos de un espacio X.
a) ¿Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo por caminos?
b) ¿Si $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo por caminos?

Solución: a) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es conexo por caminos por ser una unión de espacios conexos por caminos con intersección no vacía ($\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1$).
b) No tiene por qué ser conexo. Por ejemplo, si $A_i = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times (-\infty, i]$, se tiene que todos los A_i son conexos por caminos pero $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ no lo es.
Otro ejemplo sería $A_i = \{(x, y) \in B_1(0, 0) \mid y \neq 0 \text{ ó } y = 0, x < 1 - \frac{1}{n}\}$,



Ejercicios

Ejercicio 12. Demostrar que $A \times B$ es conexo por caminos si y solo si A y B lo son.

Solución: $\Rightarrow$**)** Consideramos las proyecciones $p_1 : A \times B \longrightarrow A$ y $p_2 : A \times B \longrightarrow Y$ que sabemos que son continuas y sobreyectivas.
Entonces, como $A \times B$ es conexo por caminos, también lo son A y B.

$\Leftarrow$**)** Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos puntos de $X \times Y$.
Consideramos el punto (x_1, y_2).
Como Y es conexo por caminos existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ continua tal que $\alpha(0) = y_1$, $\alpha(1) = y_2$. Entonces $\alpha' : [0,1] \longrightarrow X \times Y$ dada por $\alpha'(t) = (x_1, \alpha(t))$ es un camino de (x_1, y_1) a (x_1, y_2).
Como X es conexo por caminos existe $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\beta(0) = x_1$, $\alpha(1) = x_2$. Entonces $\beta' : [0,1] \longrightarrow X \times Y$ dada por $\beta'(t) = (\beta(t), y_1)$ es un camino de (x_1, y_2) a (x_2, y_2).

Entonces $\gamma : [0,1] \times X \times Y$ dada por $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$ es un camino de (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

Ejercicios

Ejercicio 13. Calcular las componentes conexas por caminos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$.

Solución: Las componentes conexas por caminos de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ son los puntos pues sabemos que las componentes conexas son los puntos y, como conexo por caminos implica conexo, las componentes conexas por caminos están contenidas en componentes conexas.

Ejercicio 14. Demostrar que dos espacios homeomorfos han de tener el mismo número de componentes conexas por caminos.

Solución: Sea $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_m$ las componentes conexas por caminos de X y sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las componentes conexas por caminos de Y.
Como f es continua, manda conjuntos conexos por caminos en conjuntos conexos por caminos. Por tanto, para cada $i \in \{1, 2 \ldots, m\}$ existe $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$ tal que $f(B_i) \subset C_j$.
Como f es suprayectiva ha de ser $m \geq n$.
Análogamente, de se f^{-1} continua y suprayectiva se deduce que $m \leq n$.
Por tanto, $m = n$.